ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 α) Ορισμός σχ. βιβλίο σελ. 15

β) i. θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 35

ii. θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 35-36

Α.2 Σχ. βιβλίο σελ. 142

Α.3 Θεώρημα σελ. 135

Α.4 α) Λάθος

Αιτιολόγηση: σχόλιο σχ. βιβλίο σελ. 134

β) Λάθος, διότι αυτό ισχύει μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0

Α.5 γ

ΘΕΜΑ Β

Β.1

$f: \Re \to \Re$

$f(x) = e^{-x} + \lambda,\ \lambda \in \Re,\ D_f = \Re$

Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$, θα ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x} + \lambda\right) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x} + \lambda\right) = 2 \underset{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0}{\overset{\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty}{\Leftrightarrow}} 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

B.2

Για $\lambda = 2$: $f(x) = e^{-x} + 2$

Θεωρώ την $g(x) = f(x) - x \Leftrightarrow g(x) = e^{-x} + 2 - x,\ D_f = \Re$

- Η g είναι συνεχής στο $\Re$ ως διαφορά και σύνθεση συνεχών άρα είναι και συνεχής στο [2,3]
- $$\left.\begin{array}{r} g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} > 0 \\ g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = e^{-3} - 1 = \dfrac{1}{e^3} - 1 = \dfrac{1 - e^3}{e^3} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2) \cdot g(3) < 0$$

Ισχύει για την g το θ. Bolzano στο [2,3], άρα η εξίσωση: $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (2,3)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με:

$g'(x) = e^{-x} \cdot (-x)' + (2)' - (x)' = -e^{-x} - 1 < 0,$ για κάθε $x \in \Re$

Άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο $\Re$, επομένως το $x_0 \in (2,3)$ είναι μοναδική της ρίζα.

B.3

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με: $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \Re$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$, οπότε και $1-1$.

Αφού η f είναι $1-1$ αντιστρέφεται.

$$y = f(x) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y = e^{-x} + 2 \\ y > 2 \\ \scriptstyle (\text{διότι}: e^{-x} + 2 > 0) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} e^{-x} = y - 2 \\ y > 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} e^{-x} = e^{\ln(y-2)} \\ y > 2 \end{array}\right\} \overset{e^x: 1-1}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{c} -x = \ln(y-2) \\ y > 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x = -\ln(y-2) \\ y > 2 \end{array}\right\}$$

Άρα, $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y-2)$, με $y > 2$

Δηλαδή,

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2),$ με $x > 2$

B.4

$f^{-1}(x) = -\ln(x-2),\ x > 2$

Η f^{-1} είναι συνεχής στο $(2,+\infty)$, ως σύνθετη συνεχών.

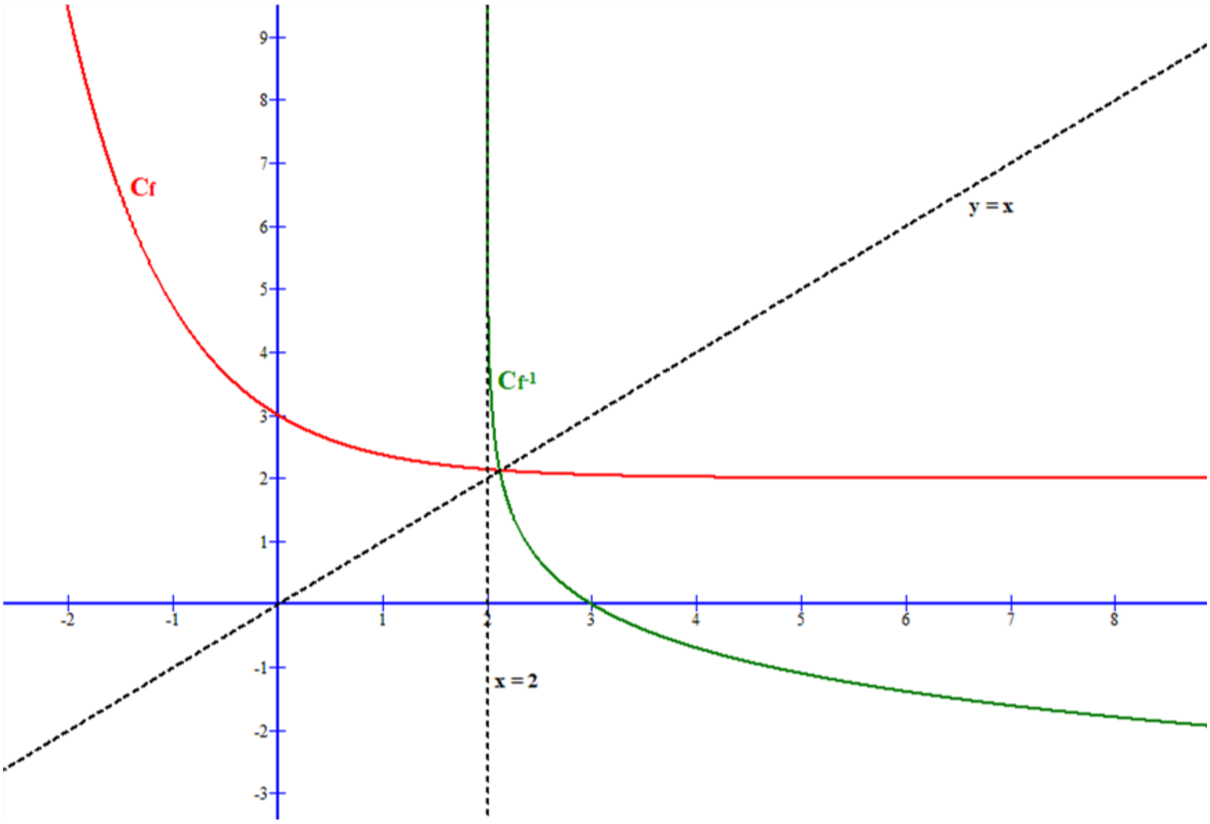
Ελέγχω για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+}(-\ln(x-2)) \underset{\lim\limits_{u\to 2^+} u = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0}{\overset{\text{ΘΕΤΩ: } u=x-2>0}{=}} \lim_{u\to 0^+}(-\ln u) \overset{\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u = -\infty}{=} +\infty$$

Επομένως, η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 2$.

Οι C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς $y = x$.

Η C_f είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης $h(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ 2 μονάδες προς τα πάνω και η $C_{f^{-1}}$ είναι μετατόπιση της $\rho(x) = -\ln x$ (συμμετρικό της $\sigma(x) = \ln x$ ως προς τον $x'x$) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha,\ x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x,\ x<1 \end{cases}$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=1,$ οπότε και συνεχής στο 1, άρα ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\quad (1)\quad \text{και}\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\quad (2)$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha=f(1)\quad (3)$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=e^0+\beta=1+\beta\quad (4)$$

$$(2)\overset{(3),(4)}{\Rightarrow}1+\alpha=1+\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$$

Για $\alpha=\beta$: $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha,\ x\ge 1 \\ e^{x-1}+\alpha x,\ x<1 \end{cases}$

$x\in(1,\delta)$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2+\alpha-(1+\alpha)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\quad (5)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(5)}{=}\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2\quad (6)$$

$x\in(\gamma,1)$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{e^{x-1}+\alpha x-(1+\alpha)}{x-1}=\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\frac{\alpha(x-1)}{x-1}=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\alpha\ (7)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(7)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-e^{1-1}}{x-1}+\alpha=\left.\frac{d\left(e^{x-1}\right)}{dx}\right|_{x=1}+\alpha=1+\alpha\ (8)$$

$$(1)\overset{(6),(8)}{\Rightarrow}2=1+\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$$

Επειδή $\alpha=\beta$ έχουμε $\alpha=\beta=1$

Τότε $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$

Γ.2

Για $\alpha=\beta=1$ έχω: $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+x, & x<1 \\ x^2+1, & x\geq 1 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1, & x<1 \\ 2\text{x}, & x\geq 1 \end{cases}$, διότι $f'(1)=2$ (από Γ1)

$f'(\text{x})>0$ στο $(-\infty,1)$ και $f'(x)>0$ στο $[1,+\infty)$ άρα $f'(\text{x})>0$ στο $\Re$

f συνεχής στο $\Re$ άρα η f $\uparrow$ στο $\Re$.

Σύνολο τιμών: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\text{e}^{x-1}+\text{x})=-\infty\,(1)$

Διότι $\lim\limits_{x\to\infty}\text{e}^{x-1}\overset{u=x-1}{\underset{\substack{x\to-\infty \\ u\to-\infty}}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\text{e}^{u}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty\ (2)$

Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\Re)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)\overset{(1),(2)}{=}\Re$

Γ.3

i. $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+x, & x<1 \\ x^2+1, & x\geq 1 \end{cases}$

Παρατηρώ ότι $f(0)=\text{e}^{-1}+0=\dfrac{1}{e}>0$ και $f(-1)=\text{e}^{-2}-1=\dfrac{1}{e^2}-1=\dfrac{1-e^2}{e^2}<0$

Θεωρώ το διάστημα $[-1,0]$:

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και επιπλέον $f(-1)\cdot f(0)<0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Bolzano για την f στο $[-1,0]$. Οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα x_0 της $f(x)=0$ στο $(-1,0)$, η οποία, συνεπώς, είναι και αρνητική.

Επιπλέον η f είναι $\uparrow$ στο $\Re$, άρα '1-1', οπότε η ρίζα $x_0\in(-1,0)$ είναι μοναδική.

ii. $f^2(x)-x_0 f(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x)\big(f(x_0)-x_0\big)=0$

Ισχύει ότι $f(x)\neq 0$ στο $(x_0,+\infty)$, αφού στο Γ3 (i.) ερώτημα δείξαμε ότι το $x_0\in(-1,0)$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$.

Το σύνολο τιμών της f για το $[x_0,+\infty)$ είναι το $f\left(\left[x_0,+\infty\right)\right)=\left[f\left(x_0\right),\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)\right)=\left[0,+\infty\right)$, δηλαδή $f\left(x\right)>0$ στο $(x_0,+\infty)$.

$f(x_0)-x_0>0$ ως άθροισμα θετικών, αφού $f(x)>0$ στο $(x_0,+\infty)$ και $x_0<0\Leftrightarrow -x_0>0$

Επομένως η εξίσωση $f(x)\big(f(x_0)-x_0\big)\neq 0$ στο $(x_0,+\infty)$

Γ.4

Το σημείο M(x,y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\mathrm{y}=\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right),\mathrm{x}\geq 1$, Το σημείο M(x,y) άρα οι συντεταγμένες του αλλάζουν με το χρόνο, οπότε

$$\mathrm{M}\Big(\mathrm{x}\left(\mathrm{t}\right),\mathrm{y}\left(\mathrm{t}\right)\Big)\equiv \mathrm{M}\Big(\mathrm{x}\left(\mathrm{t}\right),\mathrm{x}^2\left(\mathrm{t}\right)+1\Big)$$

Για $\mathrm{t}=\mathrm{t}_0$: $\mathrm{x}\left(\mathrm{t}_0\right)=3$, $\mathrm{y}\left(\mathrm{t}_0\right)=10$ και $\mathrm{x}'\left(\mathrm{t}_0\right)=2$ μον/sec.

Το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{MOK}}$ είναι:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{x}\left(\mathrm{t}\right)\cdot\mathrm{y}\left(\mathrm{t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{x}\left(\mathrm{t}\right)\cdot\left(\mathrm{x}^2\left(\mathrm{t}\right)+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\mathrm{x}^3\left(\mathrm{t}\right)+\mathrm{x}\left(\mathrm{t}\right)\right]$$

Τότε:

$$\mathrm{E}'\left(\mathrm{t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[3\mathrm{x}^2\left(\mathrm{t}\right)\cdot\mathrm{x}'\left(\mathrm{t}\right)+\mathrm{x}'\left(\mathrm{t}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{x}'\left(\mathrm{t}\right)\left[3\mathrm{x}^2\left(\mathrm{t}\right)+1\right]$$

Για $\mathrm{t}=\mathrm{t}_0$:$\mathrm{E}'\left(\mathrm{t}_0\right)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{x}'\left(\mathrm{t}_0\right)\left[3\mathrm{x}^2\left(\mathrm{t}_0\right)+1\right]=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left[3\cdot 3^2+1\right]=28$ τ.μ./sec.