

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό σελ. 135

A2.

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

(Θεωρία, σχολικό σελ. 99)

A3. Θεωρία, σχολικό σελ. 73

A4. (α) Λ

(β) Σ

(γ) Λ

(δ) Σ

(ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. Πρέπει } \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{και} \\ x(1-x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & 0 & 1 \\ \hline x^2 - x & - & \circ & + & \circ & - \end{array}$$

Άρα

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow D_{\text{fog}} = (0,1) \text{ με } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \frac{x}{1-x}$$

$$\text{B2. Η } h \text{ παραγωγίσιμη } (0,1) \text{ με } h'(x) = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0 \text{ άρα } h \uparrow \text{ στο } (0,1) .$$

Άρα '1-1' και αντιστρέφεται.

$$\text{Έστω } f(x) = y, \quad x \in (0,1)$$

$$\ln \frac{x}{1-x} = y, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - x e^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y+1}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$



B3. $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 2 φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

Άρα η $\varphi \uparrow$ στο \mathbb{R}

$$\varphi''(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - 2e^x e^x (e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x + 1 - 2e^x)}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

Άρα

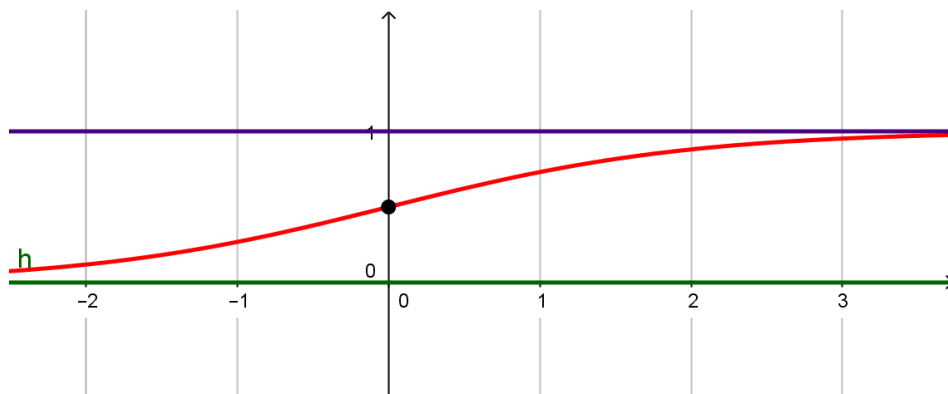
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	0	-
φ			

ΣΚ

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

B4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$. Άρα η $(\varepsilon_1): \gamma = 0$ Ορισμένη Ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$. Άρα η $(\varepsilon_2): \gamma = 1$ Ορισμένη Ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$



ΘΕΜΑ Γ

- $f(x) = -\eta\mu x \quad x \in [0, \pi]$
- $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x \quad x \in [0, \pi]$

Γ1. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

$$(\epsilon) \quad \psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \psi + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0) \Leftrightarrow \psi = -\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot x + x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0$$

Πρέπει το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ να την επαληθεύει

$$\text{Δηλαδή } -\frac{\pi}{2} = -\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \frac{\pi}{2} + x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0$$

$$\text{Θεωρώ } h(x) = \eta\mu x + \frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}, \quad x \in [0, \pi]$$

$$h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2} \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + x \cdot \eta\mu x = \eta\mu x \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$h'(x) = 0 + \eta\mu x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{κρίσιμο σημείο} \\ x = \frac{\pi}{2} & \text{κρίσιμο σημείο} \end{cases}$$

		0	$\frac{\pi}{2}$	π
x				
h'		-	+	
h		↘	↗	

Για $x = 0$ έχω τοπικό μέγιστο το $h(0) = 0$

Για $x = \pi$ έχω τοπικό μέγιστο το $h(\pi) = 0$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ έχω ολικό ελάχιστο το } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2 - \pi}{2}$$

Άρα η h έχει μοναδικές ρίζες $x_0 = 0, x_0 = \pi$

$$(\epsilon_1) \quad \psi - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \psi - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow \psi = -x$$

$$(\varepsilon_2) \quad \psi - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow \psi - 0 = -1(x - \pi) \Leftrightarrow \psi = x - \pi$$

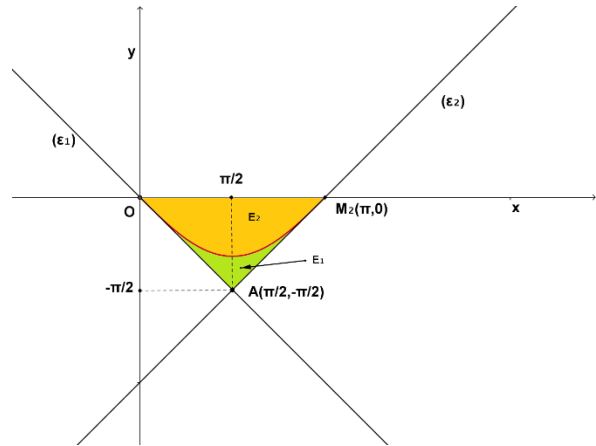
Γ2.

$$E_2 = \int_0^{\pi} (0 + \eta\mu x) dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

$$E_{(OAF)} = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot U = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$E_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$



$$\Gamma 3. h(x) = \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \frac{1}{f(x) - x + \pi} \cdot [f(x) + x]$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \left[\frac{1}{f(x) - x + \pi} \cdot [f(x) + x] \right] = +\infty$$

$$\Delta\acute{o}\tau\iota \lim_{x \rightarrow \pi} [f(x) - x + \pi] = f(\pi) - \pi + \pi = 0^+$$

Παρατηρώ ότι $f(x) - x + \pi > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [f(x) + x] = f(\pi) + \pi = \pi$$

Γ4. Ισχύει ότι $f(x) > x - \pi$ για κάθε $x \in (0, \pi)$

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{x - \pi}{x} = 1 - \frac{\pi}{x}$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx = [x - \pi \ln x]_1^e = e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. f συνεχής στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ πράξεις συνεχών. Άρα και στα $[-1, 0)$ και $(0, \pi]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \text{Η } f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0$$

Άρα η f συνεχής στο $[-1, \pi]$

$$\text{Για } x \in [-1, 0) \Rightarrow f(x) = (-x)^{4/3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{3}(-x)^{1/3}$$

$$\text{Για } x \in (0, \pi] \Rightarrow f(x) = e^x \eta \mu x \Rightarrow f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0 \quad (\sigma \upsilon \nu x \neq 0 \text{ γιατί αν } \sigma \upsilon \nu x = 0 \text{ άτοπο}) \Rightarrow \epsilon \varphi x = -1 = \epsilon \varphi \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x \in (0, \pi] \end{array} \right| \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{4/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{(-x)^{4/3}}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -(-x)^{1/3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \text{η } f \text{ δεν είναι παρ/μη στο}$$

$$x_0 = 0$$

Άρα τα $(0, f(0))$ και $\left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$ κρίσιμα σημεία

Δ2.

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$
	π		
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘
		ΤΕ	ΤΜ

Για

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \left(\eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \right) > 0$$

$$f'(x) \neq 0, x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ και συνεχής} \quad \left| \Rightarrow f'(x) > 0, x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \right.$$

Για

$$x = \pi \Rightarrow f'(\pi) = e^{\pi} (\eta\mu\pi + \sigma\upsilon\nu\pi) < 0$$

$$f'(x) \neq 0, x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \text{ και συνεχής} \quad \left| \Rightarrow f'(x) < 0, x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \right.$$

Για $x = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$

Για $x = \frac{3\pi}{4}$ έχει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(-1) = 1$$

$$f(\pi) = 0$$

$$A_1 = [-1, 0] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f \downarrow} f(A_1) = [f(0), f(-1)] = [0, 1]$$

$$A_2 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f} f(A_2) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2}\right]$$

$$A_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f \downarrow} f(A_3) = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{Άρα } f(A) = \left[0, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2} \right] \text{ γιατί } \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > \sqrt{2} \text{ προφανές}$$

$$\Delta 3. E = \int_0^\pi |f(x) - g(x)| dx$$

$$f(x) - g(x) = e^x \eta \mu x - e^{5x}$$

Για

$$x \geq 0 \Rightarrow e^x \leq e^{5x} \left| \begin{array}{l} \eta \mu x \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow e^x \eta \mu x \leq e^{5x} \eta \mu x \leq e^{5x} \text{ άρα } f(x) - g(x) \leq 0$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \eta \mu x) dx = \int_0^\pi e^{5x} dx - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx$$

$$\text{Αν } I_1 = \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = \left[e^x \eta \mu x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sigma \upsilon \nu x dx$$

$$I_1 = - \left\{ \left[e^x \sigma \upsilon \nu x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (-\eta \mu x) dx \right\}$$

$$I_1 = - \left[e^x \sigma \upsilon \nu x \right]_0^\pi - I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = -e^\pi \sigma \upsilon \nu \pi + e^0 \Leftrightarrow 2I_1 = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\text{Άρα } E = \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^\pi - \frac{e^\pi + 1}{2} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\Delta 4. 16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$$

$$f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{16}$$

$$f(x) = \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 + f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Για $x = \frac{3\pi}{4}$ προφανής ρίζα

Και αφού $f(x) > f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ η ρίζα είναι μοναδική