

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ.Π. - ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχ. Βιβλίο σελ. 31

A2. Σχ. Βιβλίο σελ. 14

A3. Σχ. Βιβλίο σελ. 72

A4. α) Σωστό, β) Λάθος, γ) Λάθος, δ) Σωστό, ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	N_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
1	2	2	2	-3	9	18
3	3	9	5	-1	1	3
5	4	20	9	1	1	4
9	1	9	10	5	25	25
Σύνολο	10	40				50

B1. α)
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{40}{10} = 4$$

β) Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 10$ (άρτιος), άρα η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα της 5^{ης} και της 6^{ης} παρατήρησης : $\delta = \frac{3+5}{2} = 4$.

γ)
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{50}{10} = 5.$$

B2. Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει ο συντελεστής μεταβολής CV να μην ξεπερνά το 10%. Έτσι :

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0,56 \text{ ή } CV \approx 56\% > 10\% \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = x^2 - x + 1, A_f = \mathbb{R}.$$

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	Γν. Φθίνουσα	Ο.Ε.	Γν. Αύξουσα

Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$, το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Γ2. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$, τότε : $f'(2) = 3$, άρα : $(\varepsilon) : y = 3x + \beta$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $A(2, f(2)) \rightarrow A(2, 3)$, άρα : $(\varepsilon) : y = 3x + \beta \Rightarrow 3 = 3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$. Τελικά : $(\varepsilon) : y = 3x - 3$.

Γ3. $(\varepsilon) : y = 3x - 3$

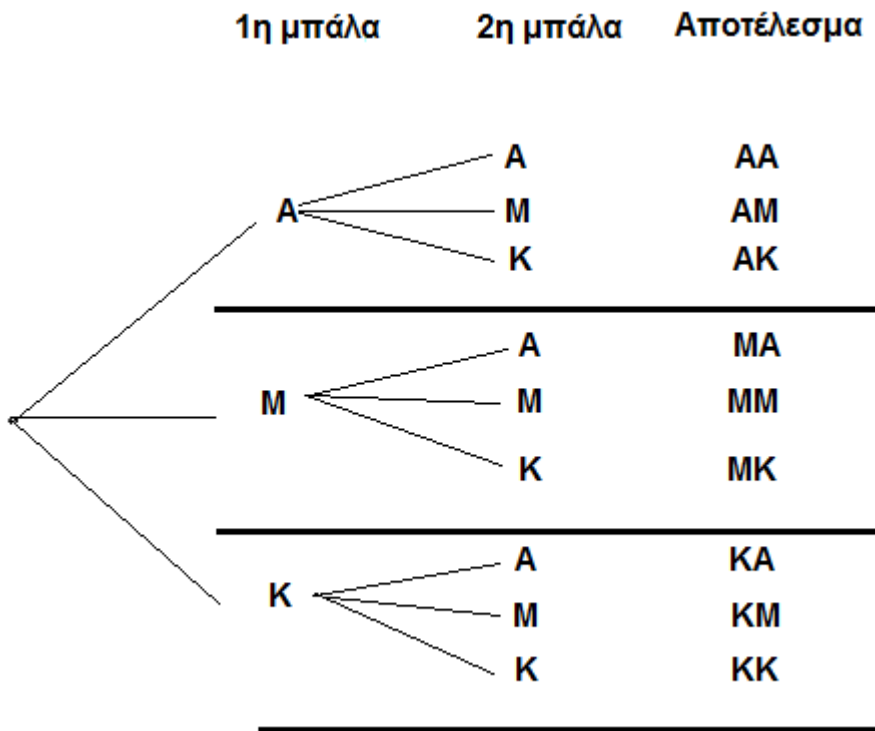
Για σημείο τομής της (ε) με τον x ' x : $y = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x - 3 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα : $B(1, 0)$.

Για σημείο τομής της (ε) με τον y ' y : $y = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow y = -3$. Άρα : $\Gamma(0, -3)$.

$$\begin{aligned} \Gamma 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το ζητούμενο δενδροδιάγραμμα είναι :



Ο δειγματικός χώρος Ω είναι : $\Omega = \{AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$.

Δ2. Τα ενδεχόμενα A και B είναι :

$$A = \{AM, MM\}$$

$$B = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$$

Δ3. α) $A \cap B = \{AM, KM\}$.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ δηλαδή } P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A') = \frac{2}{3}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

β) Το ενδεχόμενο Γ είναι ασυμβίβαστο και με το A και με το B , οπότε δεν περιέχει στοιχεία κανενός από τα A, B άρα ούτε και της ένωσης τους :

$$A \cup B = \{AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM\}.$$

Έτσι οι πιθανές περιπτώσεις για το σύνολο Γ είναι : $\Gamma = \{AA\}$, $\Gamma = \{KK\}$, $\Gamma = \{AA, KK\}$.

$$\text{Αν } \Gamma = \{AA\} \text{ τότε : } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Αν } \Gamma = \{KK\} \text{ τότε : } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Αν } \Gamma = \{AA, KK\} \text{ τότε : } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}.$$

Άρα η μέγιστη τιμή της πιθανότητας $P(\Gamma)$ είναι : $P(\Gamma) = \frac{2}{9}$.