Πανελλαδικες Εξετασεις

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

25 Μαΐου 2015

Λυσεις

Θέμα Α

Α1. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **194**

Α2. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **188**

Α3. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **259**

Α4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό

Θέμα Β

Β1. Έχουμε: $|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \overset{|z|\geq 0}{\Longleftrightarrow} |z| = 2$
Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Β2. α. Ισχύει $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$

Ομοίως $\bar{z}_2 = \dfrac{4}{z_2}$

Έχουμε:

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

Επίσης: $\bar{w} = w \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow 2\,Im(w)i = 0 \Leftrightarrow Im(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$

β. Έχουμε:

$$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \leq \frac{2|z_1|}{|z_2|} + \frac{2|z_2|}{|z_1|}$$

$$= \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} = 4$$

Αφού $w \in \mathbb{R}$ παίρνουμε $|w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4$.

Β3. Έχουμε:

$$w=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-2z_1z_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1 \ (1)$$

$$(B\Gamma)=|z_3-z_1| \overset{(1)}{=} |2iz_1+z_1|=|z_1||1+2i|=2\sqrt{1^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

$$(A\Gamma)=|z_3-z_1|=|2iz_2-z_1|=|z_1||-1+2i|=2\sqrt{(-1)^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

Αφού $(B\Gamma)=(A\Gamma)$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0$$

για κάθε $x\neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=1$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα: $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$, όπου:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=0$$

αφού: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$.

Γ2. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχει την ιδιότητα 1-1.

Επομένως η εξίσωση γράφεται:

$$f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right)=f(2) \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}(x^2+1)=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{(x^2+1)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2} \ \ (1)$$

Αφού ο αριθμός $y=\frac{e^3}{2}>0$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f η εξίσωση (1) θα έχει μια τουλάχιστον λύση. Η λύση αυτή είναι μοναδική αφού η f έχει την ιδιότητα «1-1».

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt\,, \qquad x \geq 0$$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = f(x) > 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $2x < 4x$.

Για την F εφαρμόζουμε το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[2x, 4x]$.

Η F είναι συνεχής στο $[2x, 4x] \subseteq [0, +\infty]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2x, 4x)$.

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (2x, 4x)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(x_1) = \frac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{\int_0^{4x} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt}{2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} \quad (2)$$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως για $x_1 < 4x$ παίρνουμε:

$$f(x_1) < f(4x) \Leftrightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x\, f(4x), \qquad x > 0$$

β' τρόπος:

Για κάθε x με $0 < 2x \leq t < 4x$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε:

$f(t) < f(4x) \Leftrightarrow f(t) < f(4x)$

Επομένως:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)\, dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \cdot [t]_{2x}^{4x}$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \cdot (4x - 2x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x \cdot f(4x)$$

Γ4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$g'(x)=\left(\frac{1}{x}\cdot\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)'\Leftrightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot\int_{2x}^{4x}f(t)dt+\frac{1}{x}\cdot\left(\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)'$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot\int_{2x}^{4x}f(t)dt+\frac{1}{x}\cdot(f(4x)\cdot(4x)'-f(2x)\cdot(2x)')$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot\int_{2x}^{4x}f(t)dt+\frac{1}{x}\cdot\big(4\cdot f(4x)-2\cdot f(2x)\big)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{x^2}\left(4x\cdot f(4x)-2x\cdot f(2x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)>\frac{1}{x^2}\big(4x\cdot f(4x)-2x\cdot f(2x)-2x\,f(4x)\big)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)>\frac{1}{x^2}\big(2x\cdot f(4x)-2x\cdot f(2x)\big)$$

$$\Leftrightarrow g'(x)>\frac{2}{x}\big(f(4x)-f(2x)\big)$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0$ θα ισχύει:

$2x<4x\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)>0\Leftrightarrow g'(x)>0$

Επομένως, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο $x=0$ για να είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty]$.

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to0^+}(f(4x)\cdot(4x)'-f(2x)\cdot(2x)')$$

$$=\lim_{x\to0^+}\big(4f(4x)-2f(2x)\big)=2f(0)=2\cdot1=g(0)$$

με χρήση του κανόνα de l' Hospital.

Θέμα Δ

Δ1.

Ισχύει: $f'(x)\cdot\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)\cdot e^{f(x)}+f'(x)\cdot e^{-f(x)}=2$

$\left[e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right]'=[2x]'$. Άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε: $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $c=0$ και επομένως ισχύει:

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$

$e^{f(x)}-\dfrac{1}{e^{f(x)}}=2x$

$\left(e^{f(x)}\right)^2-2x\cdot e^{f(x)}+x^2=x^2+1$

$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1$

$\left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ *(1)*

Επειδή ισχύει: $x^2+1\neq 0$ ισχύει $h(x)=e^{f(x)}-x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού $h(0)=1$

είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Από την (1) προκύπτει: $e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

Δ2. α. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ και

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

και $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'' :

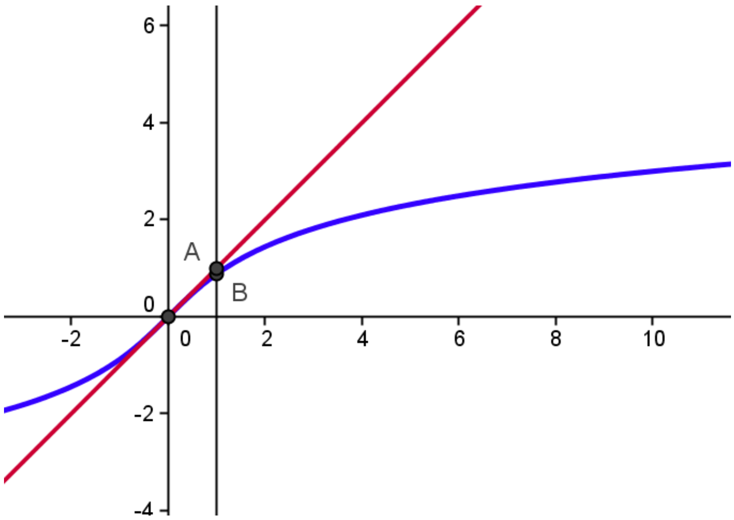
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		∪		∩	

Σημείο Καμπής

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $O\big(0, f(0)\big) = (0,0)$.

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\big(0, f(0)\big)$ είναι η:

(ε): $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$



Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ η $y = x$ βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $(0,0)$.

Επομένως $f(x) \leq x \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι το:

$$E(\Omega) = \int_0^2 |x - f(x)|\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 (x)'\ f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 x\ f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Δ3. Χρησιμοποιώντας ότι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ για $x > 0$ παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right) ln|f(x)| = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} \left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right) \cdot f(x) \cdot lnf(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} \left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right) \cdot f(x) \cdot lnf(x) \quad (1)$$

Για το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot lnf(x)$ θέτουμε $f(x)=u$ και $u_0=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ οπότε (αφού f γνησίως αύξουσα) είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot lnf(x)=\lim_{u\to 0^+} u\cdot lnu=\lim_{u\to 0^+}\frac{lnu}{\frac{1}{u}}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}}=\lim_{u\to 0^+}(-u)=0$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για το όριο $\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)}{f(x)}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de l'Hospital αφού: $\lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1=e^0-1=0$ και $f(0)=0$.

Επομένως παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)}=0$$

γιατί: $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)=1$ αφού η f' είναι συνεχής στο $x=0$ και $f(0)=0$.

Άρα από την (1) προκύπτει ότι : $\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)ln|f(x)|=0$

Δ4.

Έστω $G(x)=(x-2)\cdot\left[1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt\right]+(x-3)\cdot\left[8-3\int_0^x f^2(t)\,dt\right],\qquad x\in[2,3]$

Η G είναι συνεχής στο [2,3]. Είναι: $G(2)=3\int_0^2 f^2(t)\,dt-8$

Για κάθε $t\in[0,2]$ ισχύει: $f(t)\le t\Rightarrow f^2(t)\le t^2$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t=0$, Άρα:

$$\int_0^2 f^2(t)\,dt<\int_0^2 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

και $3\int_0^2 f^2(t)\,dt<8\Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)\,dt-8<0\Leftrightarrow G(2)<0$

$G(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt.$

Για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει $f(t^2)\le t^2$ με την ισότητα μόνο για $t=0$.

Άρα $\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\int_0^1 f(t^2)\,dt<1$

$\Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f(t^2)\,dt>0\Leftrightarrow G(3)>0$

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $G(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο (2,3).