

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ η δεδομένη σχέση γράφεται: $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow (e^x f'(x) - e^x)' = (xf'(x))'$

Άρα: $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c$

Για $x = 0$: $e^0 f'(0) - e^0 = 0 + c \Leftrightarrow c = -1$

Επομένως: $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1$ (1)

Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι: $g'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Το πρόσημο της $g'(x)$ και η μονοτονία της $g(x)$ φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Η g λοιπόν παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ το $g(0) = e^0 - 0 = 1$.

Άρα: $g(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow e^x - x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (1) λοιπόν δίνει: $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln(e^x - x))'$

Οπότε: $f(x) = \ln(e^x - x) + c_1$

Για $x = 0$: $f(0) = \ln 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

Επομένως: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Είναι: $e^x - x \geq 1$ δηλ. $e^x - x > 0$ και $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Επειδή $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και f συνεχής στο $(-\infty, 0]$ θα είναι $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$.

Ομοίως $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

Για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = 0$

Γ3. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } f''(x) &= \frac{(e^x - 1)' \cdot (e^x - x) - (e^x - 1) \cdot (e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x (e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \\ &= \frac{(e^x)^2 - xe^x - (e^x)^2 + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{-xe^x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1, x \in \mathbb{R}$

Είναι $h'(x) = -e^x - xe^x + 2e^x = e^x - xe^x = e^x(1 - x)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

οπότε έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

Στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ η $h(x)$ είναι συνεχής και γν. αύξουσα.

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(-x + 2) - 1] = 0 - 1 = -1$$

$$* \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Επίσης είναι $h(1) = -e + 2e - 1 = e - 1$

Το σύνολο τιμών της $h(x)$ στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ είναι το $(-1, e - 1]$.

Το 0 ανήκει στο $(-1, e - 1]$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση x_1 στο $(-\infty, 1)$, που είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας.

Στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$, η h είναι συνεχής και γν. φθίνουσα.

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(2 - x) - 1] = -\infty$$

Το σύνολο τιμών της $h(x)$ στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ είναι: $(-\infty, e - 1]$.

Το 0 ανήκει στο $(-\infty, e - 1]$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση x_2 στο $(1, +\infty)$, που είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας.

• Έστω τώρα η μοναδική λύση x_1 της $f''(x)$ στο $(-\infty, 1)$

$$\text{Για } x < x_1 \text{ είναι: } h(x) < h(x_1) \text{ αφού } h(x) \uparrow \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{h(x)}{(e^x - x)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x) < 0$$

$$\text{Για } x_1 < x < 1 \text{ είναι: } h(x_1) < h(x) \text{ αφού } h(x) \uparrow \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{h(x)}{(e^x - x)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x) > 0$$

Άρα στο x_1 η f παρουσιάζει σ. καμψής. Ομοίως η f παρουσιάζει σημείο καμψής στο x_2 . Δηλαδή η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμψής.

Γ4. Η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ γράφεται: $f(x) = \sin x \Leftrightarrow f(x) - \sin x = 0$.
Έστω η συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\Phi(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $\Phi'(x) = f'(x) + \eta\mu x$

Είναι όμως $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε η $\Phi'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η $\Phi(x) \uparrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι: Φ : συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Phi(0) = f(0) - \sin 0 = -1 < 0$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \text{ αφού } f(x) \geq 0 \text{ λόγω του ελαχίστου της } f.$$

(Το = ισχύει μόνο για $x = 0$)

Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $\Phi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ που είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της $\Phi(x)$.

Δ1. Από την ισότητα $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$ προκύπτει:

$$f(x) = 1 - e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Θέτουμε $u = x + t$ απ' όπου $t = u - x$ και $du = dt$

Για $t = 0$ είναι: $u = x$ ενώ για $t = -x$ είναι $u = 0$

$$\text{Η (1) λοιπόν γίνεται: } f(x) = 1 - e^{2x} \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{2x} \int_0^x \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{2x} \cdot e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως πηλίκο συνεχών οπότε η συνάρτηση

$\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Η συνάρτηση λοιπόν $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη

στο \mathbb{R} ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων 1 και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$.

Για $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}$$

Ομοίως η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Επομένως έχουμε: } e^{2x} = f'(x) \cdot g(x) \\ \text{και } e^{2x} = g'(x) \cdot f(x) \end{array} \right\} \text{ Άρα: } f'(x) \cdot g(x) = g'(x) \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0. \text{ Άρα: } \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Αλλά $f(0) = g(0) = 1$, οπότε $c = 1$. Επομένως: $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})'$$

Άρα: $f^2(x) = e^{2x} + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$: $f^2(0) = e^0 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα: $f^2(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Επομένως: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, αφού $f(x) > 0$

Δ3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{1/x}} \stackrel{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{u}{e^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{u \cdot e^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^{-u}}{u} =$

$$= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{(e^{-u})'}{(u)'} = \lim_{u \rightarrow -\infty} -e^{-u} = -\infty$$

Δ4. Για $0 \leq x \leq 1$ είναι: $f(t^2) > 0$ οπότε: $\int_x^1 f(t^2) dt > 0$

Επομένως: $F(x) = \int_1^x f(t^2) dt < 0$

Επειδή η συνάρτηση $f(t^2)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $F'(x) = f(x^2)$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\begin{aligned} E &= -\int_0^1 F(x) dx = -\int_0^1 (x)' F(x) dx = -[x F(x)]_0^1 + \int_0^1 x F'(x) dx = \\ &= -F(1) + 0 + \int_0^1 x f(x^2) dx = -0 + \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \\ &= \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$