Θέμα 1°

Α.1 Θεωρία (σελ. 235)

Α.2 Θεωρία (σελ. 191)

Β. α. ⟶ Σωστό

β. ⟶ Σωστό

γ. ⟶ Λάθος

δ. ⟶ Λάθος

ε. ⟶ Σωστό

Θέμα 2°

α. Έχουμε $\left|(2\sqrt{2}+i)\, z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2}+i\right| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}\,|z| = 6$

$\Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0,\ 0)$ και ακτίνα 2.

β. Έστω $w = x + yi$ οπότε

$|w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$

$\Leftrightarrow |x+yi-1+i| = |x+yi-3+3i|$

$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i| = |(x-3)+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1 = x^2-6x+9+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow 4x-4y-16 = 0$

$\Leftrightarrow x-y-4 = 0$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία $(\varepsilon):\ x-y-4=0$.

γ. Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι: $d(O,\varepsilon) = \dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

δ. Η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι: $|d(O,\varepsilon)-\rho| = |2\sqrt{2}-2| = 2(\sqrt{2}-1)$

Θέμα 3°

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0 = f(0)$

Άρα η f συνεχής στο 0.

β. Για $x>0$: $f'(x)=\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-1} \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Στο $\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$ η f είναι συνεχής και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$.

Στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ η f είναι συνεχής και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

Είναι: $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}\ln e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$

Οπότε έχουμε:

Στο $\Delta_1=\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$ είναι $f(\Delta_1)=\left[f\left(\dfrac{1}{e}\right), f(0)\right]=\left[-\dfrac{1}{e},0\right]$

Στο $\Delta_2=\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ είναι $f(\Delta_2)=\left[f\left(\dfrac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

Άρα $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

γ. Για $x>0$ έχουμε: $x=e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$

Αν $\alpha<-\dfrac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $\alpha=-\dfrac{1}{e}$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την την $x=\dfrac{1}{e}$

Αν $\alpha\in\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$ η εξίσωση έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες μια στο $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ και μία στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

Αν $\alpha=0$ η εξίσωση γίνεται $x\ln x=0 \Leftrightarrow x=0$ (απορρίπτεται) ή $x=1$ (μοναδική θετική ρίζα).

Αν $\alpha>0$ η f έχει ακριβώς μία θετική ρίζα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

δ. ▪ Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$, $x>0$

▪ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $f'(x)=\ln x+1$

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$$

Όμως $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για $\xi\in(x, x+1)$ έχουμε $x<\xi<x+1$ οπότε $f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)$ άρα $f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$

Θέμα 4ο

α. Έστω $\int_0^2 f(t)\,dt=c\in R$

Η ισότητα $f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)\,dt-45$ γράφεται: $f(x)=c(10x^3+3x)-45$ **(1)**

οπότε: $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (c(10x^3+3x)-45)\,dx$

$$\Leftrightarrow c=c\int_0^2(10x^3+3x)\,dx-\int_0^2 45\,dx$$

$$\Leftrightarrow c=c\left[\frac{10x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2-45(2-0)$$

$$\Leftrightarrow c=c\left(\frac{10\cdot16}{4}+\frac{3\cdot4}{2}\right)-90\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c=46\cdot c-90\Leftrightarrow 45c=90\Leftrightarrow c=2$$

Επομένως η (1) δίνει: $f(x)=2(10x^3+3x)-45\Leftrightarrow f(x)=20x^3+6x-45$

β. Για $h\neq0$ είναι: $g''(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x+h)-g'(x)}{h}\overset{-h=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{g'(x-u)-g'(x)}{-u}=$

$$=\lim_{u\to0}\frac{g'(x)-g'(x-u)}{u}=\lim_{h\to0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

γ. **i.** Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι:

$\lim\limits_{h\to0}[g(x+h)-2g(x)+g(x-h)]=g(x)-2g(x)+g(x)=0$ και $\lim\limits_{h\to0}h^2=0$

εφαρμόζοντας τον κανόνα De L΄ Hospital (η g είναι παραγωγίσιμη στο R) έχουμε:

$$\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)(x+h)'-0+g'(x-h)(x-h)'}{2h}=f(x)+45$$

$$\Leftrightarrow\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=f(x)+45$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)-g'(x)-g'(x-h)+g'(x)}{h}=f(x)+45$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]=f(x)+45$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]=f(x)+45$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}[g''(x)+g''(x)]=f(x)+45\Leftrightarrow g''(x)=f(x)+45$$

$$\Leftrightarrow g''(x)=20x^3+6x-45+45\Leftrightarrow g''(x)=20x^3+6x$$

Επομένως: $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c$

Για $x = 0$ είναι: $g'(0) = c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα: $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

Οπότε: $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_1$

Για $x = 0$ είναι: $g(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in R$.

Άρα η g είναι γν. αύξουσα στο R, οπότε είναι 1-1.