

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

1. α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 7,5

β. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ είναι $f'(x) = 0$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 10

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) σωστό ή (Λ) λάθος :

α. Αν f αντιστρέψιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, τότε $f^{-1}(2)=0$

β. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-2) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

δ. Η παράγωγος της $\int_0^2 e^{-t} \cdot \sin t dt$ είναι η $e^{-x} \cdot \sin x$

ε. Το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln \frac{1}{x} dx$ Παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1, x=e$.

Μονάδες 7,5

ΘΕΜΑ Β

α) Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[0, \kappa]$ και για τις οποίες

ισχύει $f(\kappa - x) = g(x) - \lambda \cdot f(x)$, για κάθε $x \in [0, \kappa]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $(\lambda + 1) \cdot \int_0^\kappa f(x) dx = \int_0^\kappa g(x) dx$ Μονάδες 7

β) Αν $f(x) = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x + e^2} \right)$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$f(2-x) = -2 - f(x).$$

Μονάδες 7

Υ) Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον x και τις ευθείες $x=0$, $x=2$.

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Γ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$, που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) \geq xe^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$. Μονάδες 8

B) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2} = 1$. Μονάδες 6

Γ) Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx = 1$ να βρείτε τον τύπο της f στο διάστημα $[0,1]$

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση F παράγουσα της f , όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη για $x > 0$ και ισχύει

$$6F(x) \cdot f^2(x) + 3F^2(x) \cdot f'(x) = 3F^2(x) \cdot f(x)$$

A) Να βρεθεί ο τύπος της F Μονάδες 8

$$\text{Αν } F(x) = e^{\frac{x-1}{3}}$$

B) Να αποδείξετε ότι $3e^{\frac{x-1}{3}} \geq x+2$ για $x > 0$ Μονάδες 10

Γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F την ευθεία $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ και την ευθεία $x=2$.

Μονάδες 7