ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΤΑΞΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 Ιουνίου 2014

<u>Λύσεις</u>

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεωρία

Α.2 Ορισμός

Α.3 Ορισμός

Α.4 **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Σ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β.1

$$2|z|^2 + (z+\bar{z})i - 4 - 2i = 0 \xrightarrow{z=x+yi} 2(x^2+y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2(x^2+y^2-2) + 2(x-1)i = 0 \Longrightarrow x^2+y^2-2 = 0 \ \kappa\alpha\iota\ x-1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = 1 \ \kappa\alpha\iota\ 1+y^2-2 = 0 \ \Longrightarrow (x = 1 \ \kappa\alpha\iota\ y = 1) \text{ή} \ (x = 1 \ \kappa\alpha\iota\ y = -1)$$

Άρα οι λύσεις είναι οι μιγαδικοί $z_1 = 1+i, z_2 = 1-i$

Β.2

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{40}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} = 3\left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^{20}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} = 3\left(\frac{2i}{-2i}\right)^{20}\frac{1-i}{1+i} = 3\frac{1-i}{1+i} =$$

$$= 3\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = 3\frac{-2i}{1-i^2} = 3\frac{-2i}{2} = -3i$$

Β.3

$$|u+w| = |4(1+i)-(1-i)-i| \Longrightarrow |u+w| = |4+4i-1+i-i| \Longrightarrow |u+w|$$

$$= |3+4i| \Longrightarrow |u+w| = \sqrt{3^2+4^2} \Longrightarrow |u+w| = 5 \overset{B.2}{\Longrightarrow} |u-3i| = 5$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο (0,3) και ακτίνα 5.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

Έχουμε:

$h(x) = x - \ln(e^x + 1), x\epsilon\mathbb{R}$

$h'(x) = 1 - \dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x+1}$

$h''(x) = -\dfrac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x\epsilon\mathbb{R}$

Άρα η h είναι κοίλη για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.

Γ.2

$e^{h\left(2h'(x)\right)} < \dfrac{e}{e+1} \Rightarrow \ln e^{h\left(2h'(x)\right)} < \ln\dfrac{e}{e+1} \Rightarrow$

$h\left(2h'(x)\right) < h(1) \xRightarrow{h \nearrow \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\epsilon\mathbb{R}} 2h'(x) < 1 \Rightarrow \dfrac{2}{e^x+1} < 1 \Rightarrow$

$e^x + 1 > 2 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow x > 0$

Γ.3

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x - \ln(e^x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} [\ln e^x - \ln(e^x+1)]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{h\to1} \ln h = \ln 1 = 0$, όπου h = $\frac{e^x}{e^x+1}$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{1}{1+0} = 1$

Άρα η οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της h είναι η y=0

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[1 - \dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right] = 1$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ =0 και $\lim\limits_{x\to-\infty} (\ln(e^x+1)\cdot\frac{1}{x}) = 0\cdot 0 = 0$

και

$\lim\limits_{x\to-\infty} [h(x) - x] = -\lim\limits_{x\to-\infty} [\ln(e^x+1)] = 0$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης της h είναι η y=x

Γ.4

Έχουμε ότι: $h(x)+ln2 = h(x)-h(0)$ και επειδή

$x>0 \xRightarrow{h \nearrow \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}} h(x)>h(0) \Rightarrow h(x)-h(0)>0$

Οπότε:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 e^x(x-\ln(e^x+1)+ln2)\,dx$$

$$= \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 e^x \ln(e^x+1)\,dx + \int_0^1 e^x ln2 dx$$

Θέτουμε: $e^x+1 = u \text{ τότε } e^x dx = du \text{ και}$

$\text{για } x=0 \text{ έχουμε } u=2 \text{ ενώ για } x=1 \text{ έχουμε } u=e+1 \text{ οπότε}$

Οπότε $\int_0^1 e^x \ln(e^x+1)\,dx = \int_2^{e+1} lnu\,du = [xlnx-x]_2^{e+1}$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(x)\,dx &= (xe^x)_0^1-(e^x)_0^1+ln2(e^x)_0^1-(xlnx-x)_2^{e+1}\\
&= e-e+1+eln2-ln2-[(e+1)\ln(e+1)-e-1-2ln2+2]\\
&= 1+eln2-ln2-(e+1)\ln(e+1)+e-1+2ln2\\
&= ln2+eln2+e-(e+1)\ln(e+1)\\
&= ln2+(e+1)(ln2+1)-(e+1)\ln(e+1)\\
&= ln2+(e+1)[ln2+1-\ln(e+1)] = ln2+(e+1)ln\frac{2e}{e+1}\\
&= ln2+ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)^{(e+1)} = ln\left[2\left(\frac{2e}{e+1}\right)^{(e+1)}\right]\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1

Έχουμε: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 0 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0

Έχουμε: $f'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}, x\neq 0$

Έστω $g(x) = xe^x-e^x+1, x\in\mathbb{R} \text{ τότε } g'(x) = e^x+xe^x-e^x = xe^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g’	-	0	+
g	↘		↗

Η g έχει ελάχιστο το g(0)=0 άρα ισχύει ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0 \; για\; κάθε\; x \neq 0$ δηλαδή η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ.2

α.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή $f'(0) = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f’		+	
f	0	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{e^x-1}{x} = 0,\; \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty,$

$f(x) > 0\; (f\; συνεχής\; και\; γνησίως\; αύξουσα)$

Έστω $g(x) = \int_1^x f(u)du\; με\; g'(x) = f(x) > 0 \Longrightarrow g\; γνησίως\; αύξουσα\; στο\; \mathbb{R},$ η εξίσωση γίνεται: $g\big(2f'(x)\big) = 0 = g(1) \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}.$

Προφανής λύση x=0 και x=0 μοναδική λύση αφού f’ γνησίως αύξουσα στο R (f κυρτή)

β.

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{x(t)}-1}{x(t)} & , x(t) \neq 0 \\ 1 & , x(t) = 0 \end{cases}$$

$x(t)\neq 0$: $y(t)=f(x(t))$ με $y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$

Είναι $y'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{2}$ και $\frac{x'(t_0)}{2}=f'\big(x(t_0)\big)\cdot x'(t_0) \overset{x'(t_0)}{\Longleftrightarrow} f'\big(x(t_0)\big)=\frac{1}{2}$

Επειδή f κυρτή είναι f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε

$f'\big(x(t_0)\big)=f'(0) \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x(t_0)=0$. Άρα ο Ρ.Μ της τετμημένης είναι διπλάσιος του Ρ.Μ της τεταγμένης όταν το υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο (0,1)

ή $x(t)\neq 0 : y(t)=\frac{e^{x(t)}-1}{x(t)}$ *με* $y'(t)=\frac{e^{x(t)}\cdot x'(t)\cdot x(t)-\left(e^{x(t)}-1\right)\cdot x'(t)}{x^2(t)}$

και $y'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{2}$ *τότε* $\frac{x'(t_0)}{2}=\frac{x'(t_0)\cdot\left(e^{x(t_0)}\cdot x(t_0)-e^{x(t_0)}+1\right)}{x^2(t_0)}$

Έστω $l_1(x)=2\cdot\left(e^x\cdot x-e^x+1\right)-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ *συνεχής και παραγωγίσιμη*

$l'_1(x)=2\cdot\left(e^x\cdot x+e^x-e^x\right)-2x=2x\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$

l_1 *γν. αύξουσα στο* $\mathbb{R}$ *και* $l_1(0)=0$

x		0	
x	-	0	+
e^x-1	-	0	+
l'_1	+	0	+
l_1	↗		↗

οπότε x=0 μοναδική λύση της $l_1(x)=0$

Δ.3

g(x)=$(x\cdot f(x)+1-e)^2\cdot(x-2)^2=(e^x-e)^2\cdot(x-2)^2$, $x\in(0,+\infty)$ συνεχής και παραγωγίσιμη

g'(x)=$2\cdot(e^x-e)\cdot e^x\cdot(x-2)^2+(e^x-e)^2\cdot 2(x-2)$

$=2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot\left(e^x(x-2)+e^x-e\right)$

$=2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot\left(e^x\cdot x-e^x-e\right)$

Έστω φ(x)=$e^x\cdot x-e^x-e$, $x\in\mathbb{R}$ *με* $\varphi'(x)=e^x\cdot x$

x	0		+∞
φ'		+	
φ		-1-e ↗	+∞

φ(0)=-1-e <0 ,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(x-1-\frac{e}{e^x}\right)=(+\infty)\cdot(+\infty-1-0)=+\infty$$

Είναι φ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε φ($(0,+\infty)$)=(-1-e, +∞), οπότε η φ(x)=0 έχει μοναδική λύση $x_0\in(0,+\infty)$

Αλλά φ(1)=−e<0 και φ(2)=$2e^2-e^2-e=e^2-e=e(e-1)>0$

Οπότε η λύση $x_0\in(1,2)$ (ΘΒ) και φ(x)<0 για $x\in(0,x_0)$,
$\varphi(x)>0\ \ \text{για}\ x\in(x_0,+\infty)$

ή

x	0		1		x_0		2	+∞
e^x-e	0	-		+		+		+
$x-2$		−		−		−	0	+
φ(x)		−		−	0	+		+
g'		−	0	+	0	−	0	+

x	0		1		x_0		2	+∞
g'		−	0	+	0	−	0	+
g		↘		↗		↘		↗
			τ.ε		τ.μ		τ.ε	

Οπότε η g έχει δύο θέσεις τοπικού ελάχιστου και μία θέση τοπικού μέγιστου.

Επιμέλεια: Σφανδού Ιφιγένεια