**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ (ΟΜΑΔΑ Β)**
**ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1, Α2, Α3** Θεωρία σχολικού βιβλίου

**Α4** α – Σ β – Σ γ – Λ δ – Λ ε – Λ

## ΘΕΜΑ Β

### Β1

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow$$

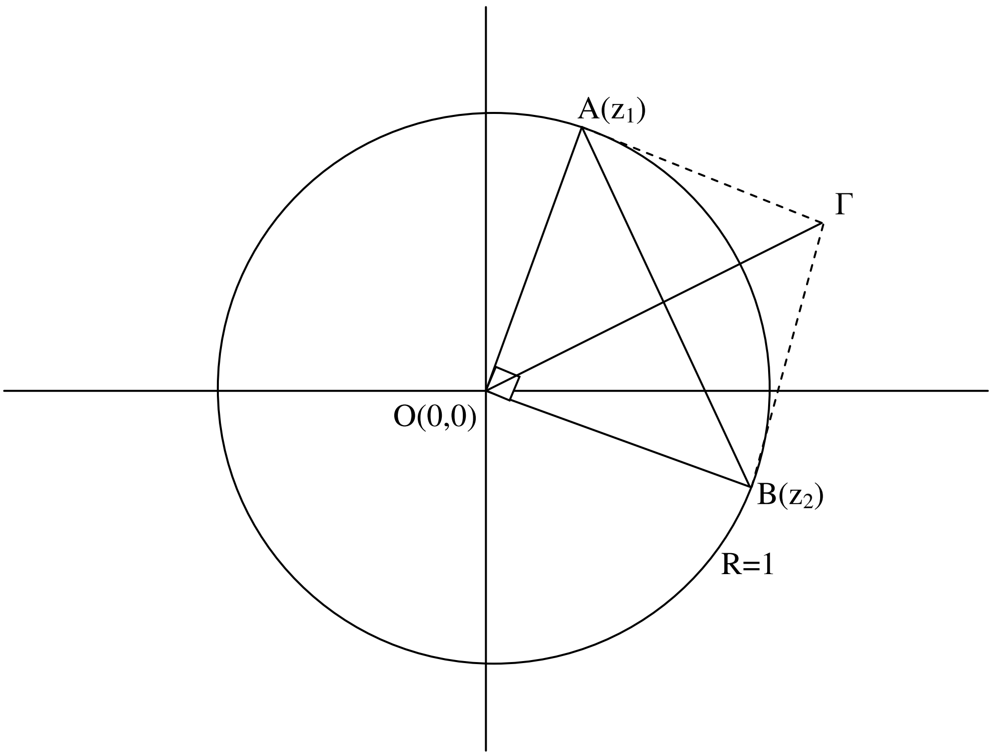
$$\Leftrightarrow z\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\overline{z}+z+\overline{z}+1=4 \Leftrightarrow 2z\overline{z}=2 \Leftrightarrow z\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$$

Ο z κινείται σε κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και R = 1

### Β2

$O\overset{\Delta}{A}B$ = ορθογώνιο

$AB=|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ $\quad\quad$ $|z_1-z_2|=(BA)=(O\Gamma)=|z_1+z_2|=\sqrt{2}$



**B3**

$$\left|w-5\overline{w}\right|=12 \Leftrightarrow \left(w-5\overline{w}\right)\left(\overline{w}-5w\right)=144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w\overline{w}-5w^2-5\overline{w}^2+25w\overline{w}=144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\left(w^2+\overline{w}^2\right)+26w\overline{w}=144 \Leftrightarrow -5\left[\left(w+\overline{w}\right)^2-2w\overline{w}\right]+26w\overline{w}=144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\left(w+\overline{w}\right)^2+36w\overline{w}=144 \xrightarrow{w=x+yi}$$

$$-5\left(2x\right)^2+36\left(x^2+y^2\right)=144 \Leftrightarrow -20x^2+36x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$\alpha=3,\ \beta=2,\ \gamma=\sqrt{5}$

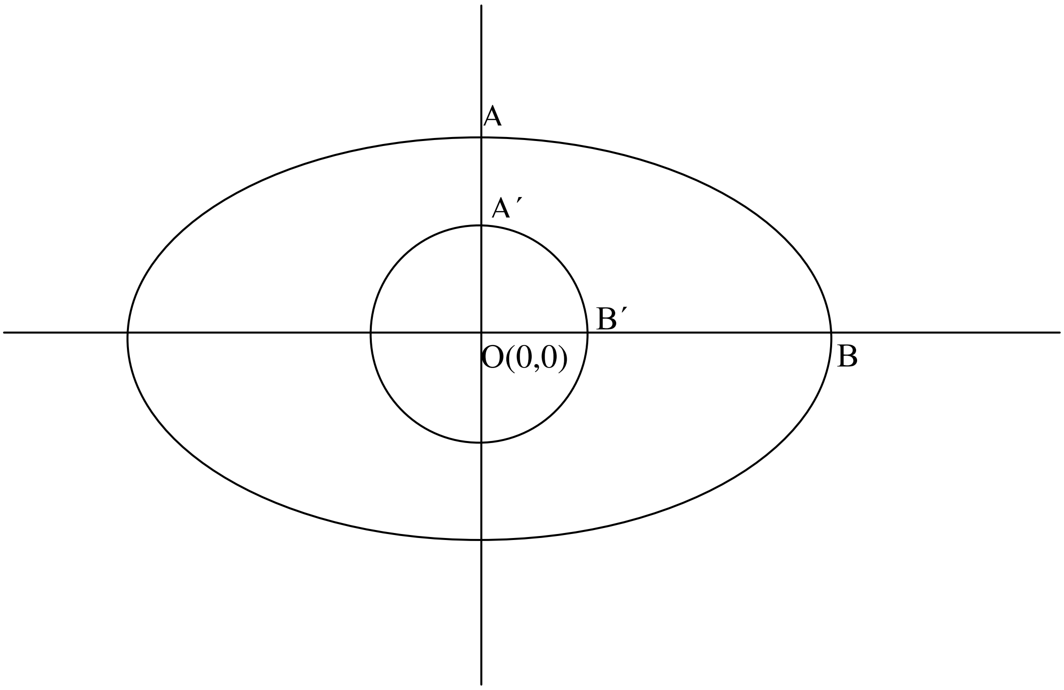
**B4**

$c: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$\alpha=3,\ \beta=2, \gamma=\sqrt{5}$

$\left|z-w\right|\min=\left(AA'\right)=\beta-R=2-1=1$

$\left|z-w\right|\max=\left(BB'\right)=\alpha+R=3+1=4$




**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1**.

$$f'\left(x\right)=\ln x+\left(x-1\right)\frac{1}{x}$$

$$f''\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{x-1\left(x-1\right)}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}>0 \ \text{ για κάθε } x>0$$

άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$

παρατηρώ ότι $f'\left(1\right)=0$ άρα $x_0=1$ κρίσιμο σημείο

Άρα για κάθε $0<x<1$ έχουμε $f'\left(x\right)<f'\left(1\right) \Leftrightarrow f'\left(x\right)<0$ δηλ $f \downarrow$ στο $\left(0,1\right]$.

για κάθε $x>1$ έχουμε $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$ δηλ $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$

Θα βρώ τα όρια στο $x_0=0^+$ και στο $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

O.E.

ΟΕ $f(1)=-1$

$\Sigma T_f=[-1,+\infty)$

**Γ2**.

$x^{x-1}=e^{2013}\Leftrightarrow \ln x^{x-1}=2013$

$(x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012$

$f(x)=2012$

Παρατηρώ ότι η $f$ παίρνει την τιμή 2012 στο διάστημα $(0,1)$ διότι έχει $\Sigma T=(-1,+\infty)$ και στο $[1,+\infty)$ διότι έχει $\Sigma T=[-1,+\infty)$

**Γ3**.

$f(x_1)=f(x_2)=2012$ με $x_1<x_2$

$h(x)=e^{x}f(x)^{-2012\cdot e^{x}}$ με $h'(x)=e^{x}\left[f(x)+f'(x)\right]^{-2012\cdot e^{x}}$

- $h$ συναρτ. στο $[x_1,x_2]$
- $h$ παραγ. στο $(x_1,x_2)$
- $h(x_1)=e^{x_1}f(x_1)-2012\cdot e^{x_1}=0$
- $h(x_2)=e^{x_2}f(x_2)-2012\cdot e^{x_2}=0$

Άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle και άρα υπάρχει

$x_0\in(x_1,x_2):h'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}\left[f'(x_0)+f(x_0)\right]-e^{x_0}\cdot 2012\Rightarrow$

$f'(x_0)+f(x_0)=2012$

**Γ4**.

$g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x$

$g(x)=0\Leftrightarrow (x-1)\ln x=0\Leftrightarrow x=1$

$$E=\int_1^e \left|(x-1)\ln x\right|dx$$

Όμως $(x-1)\ln x \geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$

Άρα $E=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^e$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{4}e^2+e+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}\ \text{τ. μ.}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1** Θεωρώ

$$h(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt+\frac{x^2-x}{e},\quad \text{με}\quad x>0$$

$$h'(x)=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)+\frac{2x-1}{e},\quad \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)$$

Παρατηρώ ότι $h(1)=0$

Άρα ισχύει $h(x)\geq h(1)$ για κάθε $\chi>0$

Άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ και επειδή το 1 είναι εσωτερικό σημείο η h παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$ και είναι παραγωγίσιμη από το Θ. Fermat

$$h'(1)=0\Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$$

- f συνεχής στο $(0,+\infty)$
- $f(x)\neq 0$
- $f(1)=-\frac{1}{e}<0$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x>0$

Τότε $\ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)$

Θεωρώ $P(x)=\ln x-x,\quad x>0$

$$P'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

| | $-\infty$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P′ | | | + | 0 | - | |
| P | | | ↗ | | ↘ | |

Ολικό μέγιστο: P(1) = -1

Άρα $P(x) \le -1 < 0$ για κάθε x>0

Άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e \neq 0$

Άρα $\frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e} = f(x)$

Άρα η f(x) είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Τότε $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$ παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$

Άρα $\frac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{c \cdot e^x}$

$f(1) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{1}{c \cdot e} = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow c = 1$

Δηλαδή $f(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$

**Δ2**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left((x-1)\ln x\right) = -\infty$$

Θεωρώ $P(x) = f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)$

Θέτω $u = \frac{1}{f(x)}$ όταν $f(x) \to -\infty,\ u \to 0^-$

Άρα $\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] \underset{x\to 0^+ \text{ τότε } u\to 0^-}{\overset{u=\frac{1}{f(x)}}{=}} \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{DHL}{\overset{(:)}{=}}$

$\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \underset{DHL}{\overset{(:)}{=}} \lim_{u\to 0^-}\frac{-\eta\mu u}{2} = 0$

**Δ3**

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$$

$F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x) < 0,\quad F$ φθίνουσα

$F''(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1\right) > 0$ άρα F κυρτή

- F συνεχής στο [x, 2x], [2x, 3x]
- F παραγωγίσιμη στο (x, 2x), (2x, 3x)

Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα [x, 2x], [2x, 3x] και άρα υπάρχουν $\xi_1$, $\xi_2 \in$ (x, 2x), (2x, 3x) αντίστοιχα έτσι ώστε:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\frac{F(2x)-F(x)}{x}$$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

Όμως $\xi_1<\xi_2 \xrightarrow{F'\uparrow} F'(\xi_1)<F'(\xi_2)$

$F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x) \Leftrightarrow 2F(2x)<F(x)+F(3x)$

**Δ4**.

$h(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$

h συνεχής στο $[\beta,2\beta]$

$h(\beta)=2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta)=F(\beta)-F(3\beta)$

Όμως $\beta<3\beta \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F(\beta)>F(3\beta) \Rightarrow h(\beta)>0$

Άρα $h(\beta)>0$.

$h(2\beta)=2F(2\beta)-F(3\beta)-F(\beta)<0$

άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano και υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi\in(\beta,2\beta): h(\xi)=0 \Rightarrow F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$

Επειδή $h'(x)=2F'(x)=f(x)<0$ για κάθε $x>0$ τότε η h είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή 1 – 1 άρα η ρίζα x = ξ είναι μοναδική.