ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΙΟΥ 2011

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 260

Α2. Θεωρία σελ. 280

Α3. **α)** → Σωστό **β)** → Σωστό **γ)** → Λάθος **δ)** → Λάθος **ε)** → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει: $|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{\bar{z}+3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το $K(0,\ 3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Β2. Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται: $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i} \Leftrightarrow (\bar{z}+3i)(z-3i)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{(z-3i)}(z-3i)=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow |z-3i|=1$ που ισχύει

Β3. $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)\in R$ **.**

Επειδή η εικόνα του z είναι στον κύκλο με κέντρο $K(0,\ 3)$ και ακτίνα $\rho=1$ θα είναι $-1\le \mathrm{Re}(z)\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2\,\mathrm{Re}(z)\le 2$. Άρα $-2\le w\le 2$

Β4. Ισχύει $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i} \Leftrightarrow z-w=3i-\dfrac{1}{z-3i}$

Άρα $|z-w|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-(\bar{z}+3i)|=|3i-\bar{z}-3i|=|-\bar{z}|=|\bar{z}|=|z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in R$ η δεδομένη σχέση γράφεται: $e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x = f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow (e^x f'(x)-e^x)'=(xf'(x))'$

Άρα: $e^x f'(x)-e^x = xf'(x)+c$

Για $x=0$: $e^0 f'(0)-e^0 = 0+c \Leftrightarrow c=-1$

Επομένως: $e^x f'(x)-e^x = xf'(x)-1 \Leftrightarrow e^x f'(x)-xf'(x)=e^x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x-1$ (1)

Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x-x$, $x \in R$

Είναι: $g'(x)=e^x-1$, $x \in R$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$. Το πρόσημο της $g'(x)$ και η μονοτονία της $g(x)$ φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Η g λοιπόν παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ το $g(0)=e^0-0=1$.

Άρα: $g(x)\ge 1$ για κάθε $x \in R$.

$\Leftrightarrow e^x-x \ge 1$ για κάθε $x \in R$.

Η (1) λοιπόν δίνει: $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow f'(x)=(\ln(e^x-x))'$

Οπότε: $f(x)=\ln(e^x-x)+c_1$

Για $x=0$: $f(0)=\ln 1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

Επομένως: $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x \in R$.

Γ2. Για $x \in R$ είναι: $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$

Είναι: $e^x-x \ge 1$ δηλ. $e^x-x>0$ και $e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(-\infty, 0)$ και f συνεχής στο $(-\infty, 0]$ θα είναι $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$.

Ομοίως $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

Για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0)=0$

Γ3. Για $x \in R$ είναι: $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

Οπότε: $f''(x) = \dfrac{(e^x - 1)' \cdot (e^x - x) - (e^x - 1) \cdot (e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x (e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} =$

$= \dfrac{(e^x)^2 - xe^x - (e^x)^2 + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \dfrac{-xe^x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$, $x \in R$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$, $x \in R$

Είναι $h'(x) = -e^x - xe^x + 2e^x = e^x - xe^x = e^x (1 - x)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

οπότε έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h΄(x)		+	0	−	
h(x)		↗	*max*	↘	

Στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ η $h(x)$ είναι συνεχής και γν. αύξουσα.

Είναι: $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[e^x (-x + 2) - 1\right] \overset{*}{=} 0 - 1 = -1$

$*$ Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[e^x (-x + 2)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x + 2}{e^{-x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Επίσης είναι $h(1) = -e + 2e - 1 = e - 1$

Το σύνολο τιμών της $h(x)$ στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ είναι το $(-1, e - 1]$.

Το 0 ανήκει στο $(-1, e - 1]$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση x_1 στο $(-\infty, 1)$, που είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας.

Στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$, η h είναι συνεχής και γν. φθίνουσα.

Είναι: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-xe^x + 2e^x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} [e^x (2 - x) - 1) = -\infty$

Το σύνολο τιμών της $h(x)$ στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ είναι: $(-\infty, e - 1]$.

Το 0 ανήκει στο $(-\infty, e - 1]$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση x_2 στο $(1, +\infty)$, που είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας.

- Έστω τώρα η μοναδική λύση x_1 της $f''(x)$ στο $(-\infty, 1)$

Για $x < x_1$ είναι: $h(x) < h(x_1)$ αφού $h(x) \uparrow \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f''(x) < 0$

Για $x_1 < x < 1$ είναι: $h(x_1) < h(x)$ αφού $h(x) \uparrow \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f''(x) > 0$

Άρα στο x_1 η f παρουσιάζει σ. καμπής. Ομοίως η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_2. Δηλαδή η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4. Η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \text{συν}x$ γράφεται: $f(x) = \text{συν}x \Leftrightarrow f(x) - \text{συν}x = 0$.

Έστω η συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - \text{συν}x$, $x \in R$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\Phi(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\Phi'(x) = f'(x) + \text{ημ}x$

Είναι όμως $\text{ημ}x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε η $\Phi'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η $\Phi(x) \uparrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι: Φ : συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Phi(0) = f(0) - \text{συν}0 = -1 < 0$

$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{συν}\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ αφού $f(x) \geq 0$ λόγω του ελαχίστου της f.

(Το $=$ ισχύει μόνο για $x = 0$)

Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $\Phi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ που είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της $\Phi(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την ισότητα $\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$ προκύπτει:

$$f(x) = 1 - e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt,\ x \in R \quad (1)$$

Θέτουμε $u = x + t$ απ΄ όπου $t = u - x$ και $du = dt$

Για $t = 0$ είναι: $u = x$ ενώ για $t = -x$ είναι $u = 0$

Η (1) λοιπόν γίνεται: $f(x) = 1 - e^{2x} \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{2x} \int_0^x \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{2x} \cdot e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du,\ x \in R$$

Η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών οπότε η συνάρτηση $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ είναι παραγωγίσιμη στο R. Η συνάρτηση λοιπόν $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων 1 και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$.

Για $x \in R$ είναι:

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}$$

Ομοίως η συνάρτηση g(x) είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$.

Επομένως έχουμε: $\left.\begin{aligned} e^{2x}&=f'(x)\cdot g(x)\\ \text{και } e^{2x}&=g'(x)\cdot f(x)\end{aligned}\right\}$ Άρα: $f'(x)\cdot g(x)=g'(x)\cdot f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0.\ \text{Άρα: } \frac{f(x)}{g(x)}=c$$

Αλλά $f(0)=g(0)=1$, οπότε $c=1$. Επομένως: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $x\in R$.

Δ2. Για $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}\Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow (f^2(x))'=(e^{2x})'$$

Άρα: $f^2(x)=e^{2x}+c$, $x\in R$.

Για $x=0$: $f^2(0)=e^0+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα: $f^2(x)=e^{2x}$, $x\in R$. Επομένως: $f(x)=e^x$, $x\in R$, αφού $f(x)>0$

Δ3. $$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln e^x}{e^{1/x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{e^{1/x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim_{u\to-\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{u\cdot e^u}=\lim_{u\to-\infty}\frac{e^{-u}}{u}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{(e^{-u})'}{(u)'}=\lim_{u\to-\infty}-e^{-u}=-\infty$$

Δ4. Για $0\le x\le 1$ είναι: $f(t^2)>0$ οπότε: $\int_x^1 f(t^2)dt>0$

Επομένως: $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt<0$

Επειδή η συνάρτηση $f(t^2)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ η συνάρτηση F(x) είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $F'(x)=f(x^2)$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=-\int_0^1F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)\,dx=-\left[x\,F(x)\right]_0^1+\int_0^1xF'(x)\,dx=$$

$$=-F(1)+0+\int_0^1xf(x^2)\,dx=-0+\int_0^1xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(e^{x^2})'\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{e-1}{2}\ \text{τ.μ.}$$