ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Σχολικό Βιβλίο σελ. 65

Β.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 150

Β.2. **α.** Σχολικό Βιβλίο σελ. 148
β. Σχολικό Βιβλίο σελ. 149

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. Πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Άρα $A = R - \{-1\}$

β. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2\cdot 3}{3+1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

γ. $f'(x) = \dfrac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

δ. Πρέπει $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_0+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0{}^2 + 2x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_0(x_0+2) \Leftrightarrow x_0 = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

- $\boxed{x_0 = 0}$ $\quad f(x_0) = f(0) = \dfrac{2\cdot 0}{0+1} = 0$

  Άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο O(0,0).

  Επομένως (ε_1): $y = 2x$.

- $\boxed{x_0 = -2}$ $\quad f(x_0) = f(-2) = \frac{2(-2)}{-2+1} = 4$

  Άρα η ευθεία διέρχεται από το K(-2, 4).

  Είναι (ε_2): y = 2x + β.

  Επειδή διέρχεται από το σημείο K θα ισχύει: 4 = 2·(-2) + β ⇔ β = 8

  Επομένως (ε_2): y = 2x + 8

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\bar{x} = \frac{8+10+13+13+15+16+18+14+14+9}{10} = \frac{130}{10} = 13$

8, 9, 10, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18

Επειδή ν = 10 άρτιος διάμεσος θα είναι:

$\delta = \frac{5^{\eta}\pi\alpha\rho. + 6^{\eta}\pi\alpha\rho.}{2}$ άρα $\delta = \frac{13+14}{2} = 13{,}5$

M_0 = 13 , M_0 = 14 (δικόρυφη)

β. R = 18 – 8 = 10

$$S^2 = \frac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + 2(13-13)^2 + 2(14-13)^2 + (15-13)^2 + (16+13)^2 + (18-13)^2}{10} =$$

$$= \frac{25+16+9+2+4+9+25}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

$S_x = \sqrt{9} = 3$

$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{3}{13} \approx 0{,}23$ ή περίπου 23%

γ. Αν x_i οι τιμές πριν την έκπτωση, y_i μετά την έκπτωση, θα ισχύει:

$y_i = x_i - 0{,}1x_i = 0{,}9x_i$, i = 1, 2, …, 10

Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή θα ισχύουν:

$\bar{y} = 0{,}9 \cdot \bar{x}$

$S_\psi = |0{,}9| S_x = 0{,}9 \cdot S_x$

Άρα $CV_{\Psi} = \dfrac{S_{\Psi}}{\bar{y}} = \dfrac{0{,}9 \cdot S_x}{0{,}9 \cdot \bar{x}} = CV_x$ οπότε ο συντελεστής μεταβολής δεν μεταβάλλεται.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

α. P(A) + P(B) ≠ 2 P(A∩B) (1)

Από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων έχουμε:

P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B) ⇔ P(A) + P(B) = P(A∪B) + P(A∩B)

Οπότε από σχέση (1)⇒P(A∪B)+P(A∩B) ≠ 2P(A∩B) ⇔P(A∪B) ≠ P(A∩B)

β. f(x) = (x – P(A∪B))^3 – (x – P(A∩B))^3, x ∈ R

Η f παραγωγίσιμη στο R με

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3(x-P(A\cup B))^2\cdot(x-P(A\cup B))' - 3(x-P(A\cap B))^2(x-P(A\cap B))' = \\
&= 3(x-P(A\cup B))^2 - 3(x-P(A\cap B))^2 = \\
&= 3\left[(x-P(A\cup B))^2 - (x-P(A\cap B))^2\right] = \\
&= 3(x-P(A\cup B)+x-P(A\cap B))(x-P(A\cup B)-x+P(A\cap B)) = \\
&= 3(2x-P(A\cup B)-P(A\cap B))(P(A\cap B)-P(A\cup B))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(2x-P(A\cup B)-P(A\cap B))(P(A\cap B)-P(A\cup B))=0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow 2x = P(A\cup B)+P(A\cap B) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = \frac{P(A)+P(B)}{2}
\end{aligned}
$$

Επειδή A∩B ⊆ A∪B έχουμε P(A∩B) ≤ P(A∪B).
Όμως από ερώτημα (α) P(A∩B) ≠P(A∪B) άρα <u>P(A∩B) < P(A∪B)</u>

$$
\begin{aligned}
f'(x)>0 &\Leftrightarrow 3(2x-P(A\cup B)-P(A\cap B))(P(A\cap B)-P(A\cup B))>0 \\
&\Leftrightarrow 2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)<0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x < \frac{P(A)+P(B)}{2}
\end{aligned}
$$

	-∞	x_0	+∞
f΄(x)	+	0	-
f(x)	↗	Max	↘

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{P(A)+P(B)}{2}$

γ. Τα A, B είναι ασυμβίβαστα, άρα: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
και $P(A \cap B) = 0$

$$f(P(A)) = (P(A) - P(A \cup B))^3 - (P(A) - P(A \cap B))^3 =$$
$$= (P(A) - P(A) - P(B))^3 - (P(A))^3 = -(P(B))^3 - (P(A))^3$$

$$f(P(B)) = (P(B) - P(A \cup B))^3 - (P(B) - P(A \cap B))^3 =$$
$$= (P(B) - P(A) - P(B))^3 - (P(B))^3 = -(P(A))^3 - (P(B))^3$$

Άρα $f(P(A)) = f(P(B))$