<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

Α.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8,5

Α.2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, (=, ≤, ≥) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \ldots 1-P(A)$

Μονάδες 2

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \ldots P(A)$.

Μονάδες 2

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και Α΄ το αντίθετο του ενδεχομένου Α.

α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$.

β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$.

Μονάδες 4

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

α. $\frac{1}{4}$ **β.** $\frac{5}{12}$ **γ.** $\frac{2}{3}$ **δ.** $\frac{1}{6}$.

Μονάδες 2,5

Β.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $P(A-B)$	**1.** $\frac{1}{20}$
β. $P\left((B-A)'\right)$	**2.** $\frac{2}{15}$
γ. $P\left((A \cap B)'\right)$	**3.** $\frac{4}{5}$
	4. $\frac{1}{12}$
	5. $\frac{19}{20}$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 152 (κανόνας λογισμού πιθανοτήτων)

Α.2. **α.** P(A΄) = 1 – P(A)

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \geq P(A)$

Β.1. **α.** Αν $A' \subseteq B$ τότε P(A) + P(B) < 1

Λάθος

<u>Γιατί:</u> $A' \subseteq B$ τότε $P(A') \leq P(B)$ ή $1 - P(A) \leq P(B)$

ή $P(A) + P(B) \geq 1$

β. Αν P(A) = P(A΄) τότε 2P(A) = P(Ω) ***Σωστό***

<u>γιατί:</u> P(A) + P(A΄) = P(Ω)

επειδή: P(A) = P(A΄) προκύπτει ότι 2P(A) = P(Ω)

Β.2. Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

β. $\frac{5}{12}$

<u>επειδή:</u> $A \subseteq B$ θα είναι $P(A \cup B) = P(B) = \frac{5}{12}$

Β.3.

<u>Στήλη Α</u>	**Στήλη Β**
α. P(A – B)	**2.** $\frac{2}{15}$
β. P((B - A)΄)	**5.** $\frac{19}{20}$
γ. $P((A \cap B)')$	**3.** $\frac{4}{5}$

α. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

β.

$$P[(B - A)'] = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)] =$$

$$= 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

γ. $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = συνx+ημx.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0,1).

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in IR$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(x) = συνx + ημx

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R

Α. Έχουμε: $f'(x) = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

$f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

Οπότε: $f(x) + f''(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0$

Β. Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

(ε): $y = \lambda x + \beta$

έχουμε: $\lambda = f'(0) = -\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

όμως το Α(0,1) είναι σημείο και της ευθείας (ε). Άρα:

$1 = 1 \cdot 0 + \beta$

$\beta = 1$

οπότε: (ε): $y = x + 1$

Γ. Έχουμε: $f(\frac{\pi}{2}) = \eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 1$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = -1$

οπότε: $\lambda \cdot f'(\frac{\pi}{2}) - 2f(\frac{\pi}{2}) = 2$

$\lambda \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 2$

$\lambda = -4$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [–)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

Α. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

Μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

Μονάδες 9

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Αν F η αθροιστική συχνότητα και f η σχετική συχνότητα τότε

Ισχύει: $F_1 = f_1 = 0,2$

$f_2 = F_2 - f_1 = 0,5 - 0,2 = 0,3$

οπότε: $f_3 = 2 \cdot f_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$

και: $f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 = 1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 = 0,1$

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι:

	Κεντρικές Τιμές x_i	**v_i**	**f_i**	**F_i**
[45 – 55)	50	16	0,2	0,2
[55 – 65)	60	24	0,3	0,5
[65 – 75)	70	32	0,4	0,9
[75 – 85)	80	8	0,1	1
ΣΥΝΟΛΟ		80	1	

Β. Η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 50 \cdot 0{,}2 + 60 \cdot 0{,}3 + 70 \cdot 0{,}4 + 80 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 10 + 18 + 28 + 8 = 64$$

άρα η μέση τιμή $\bar{x}$ των παραπάνω δεδομένων είναι 64.

Γ.α. Έστω Α το ενδεχόμενο:
"ο μαθητής να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά".
Τότε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{40}{80} = 0{,}5$$ ή 50%.

β. Έστω Β το ενδεχόμενο:
"ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 74 κιλών".
Τότε:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{56}{80} = 0{,}7$$ ή 70%.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.
Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Α. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

Μονάδες 6

Β. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

Μονάδες 6

Δ. Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Επειδή έχουμε κανονική
Κατανομή θα είναι:
$\bar{x} = \delta$, άρα δεξιά της μέσης

τιμής θα υπάρχει το 50% των
παρατηρήσεων, οπότε
$\delta = 12 = \bar{x}$

Επειδή $50\% - 16\% = 34\% = \dfrac{68\%}{2}$ θα είναι:

$\bar{x} - s = 10$ ή $12 - s = 10$ ή $s = 2$

Β. Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV .
Έχουμε:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{12} \approx 0{,}1667 \quad \text{ή} \quad 16{,}67\%$$

Άρα επειδή ο CV είναι μεγαλύτερος από 10% το δείγμα ***<u>δεν</u>*** είναι ομοιογενές.

Γ. Το χρονικό διάστημα που μελετάμε είναι από 14 έως 16 λεπτά, ή από $\bar{x} + s$ έως $\bar{x} + 2s$. Οπότε το ποσοστό των μαθητών σ' αυτό το διάστημα είναι:

$$\frac{95\% - 68\%}{2} = 13{,}5\%$$

οπότε οι μαθητές που θα κάνουν χρόνο από 14 έως 16 λεπτά είναι:

$$4.000 \cdot \frac{13{,}5}{100} = 540$$

Δ. Με την καθυστέρηση των 5 λεπτών η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ από γνωστή εφαρμογή γίνεται $\bar{y} = \bar{x} + 5 = 12 + 5 = 17$ λεπτά και η τυπική απόκλιση είναι: $s_y = s_x = 2$ (δεν μεταβάλλεται). Όποτε ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV' = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2}{17} \approx 0{,}1176 \quad \text{ή} \quad 11{,}76\%$$

οπότε η μεταβολή του συντελεστή μεταβολής είναι:

$$CV' - CV = 11{,}76\% - 16{,}67\%$$

δηλαδή ελλατώθηκε κατά 4,91%.