ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Θεωρία σελ. 62

β) Είναι $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και $\vec{u} = (\alpha, \beta)$. Από την παραπάνω ισότητα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1x + 0y + \alpha \\ y' = 0x + 1y + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

γ) Η παράλληλη μεταφορά δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός γιατί οι νέες συντεταγμένες x΄, y΄ δεν συνδέονται με τις παλιές x, y μέσω σχέσεων της μορφής: $\begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y \end{cases}$

Β1. T_1: «συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x» → 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

T_2: «στροφή κατά γωνία π/2» → 2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Β2. $A = A_1A_2 - A_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

α) Είναι $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, άρα ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

β) Είναι $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ -2x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{1}{2}x' \end{cases}$

Άρα η εικόνα της ευθείας με εξίσωση 2x-y+5=0 είναι η ευθεία:

$-y' + \frac{1}{2}x' + 5 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 10 = 0$

ΘΕΜΑ 2ο

Α. **α)** $z = \frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i+2i+3}{4+9} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$

β) $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ Είναι: $\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\}$ $\theta = \frac{7\pi}{4}$ ή $\theta = -\frac{\pi}{4}$

άρα $z=\sqrt{2}\left(συν\dfrac{7π}{4}+iημ\dfrac{7π}{4}\right)$ ή $z=\sqrt{2}\left[συν\left(-\dfrac{π}{4}\right)+iημ\left(-\dfrac{π}{4}\right)\right]$

γ) $\rightarrow$ **Β.** $\dfrac{π}{2}+θ$

δ) $\rightarrow$ **Δ.** - 4

Β. $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|z-i|$ με $z\neq i$. Έστω $z=x+yi$

$|z-1|=|z-i| \Leftrightarrow |x+yi-1|=|x+yi-i| \Leftrightarrow |(x-1)+yi|=|x+(y-1)i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow y=x$

Είναι $z\neq i$ άρα $x\neq 0$ και $y\neq 1$. Το σημείο (0, 1) δεν ανήκει στην ευθεία $y=x$. Άρα ο Γ.Τ. των μιγαδικών z είναι η ευθεία $y=x$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(x^2-8x+16)=25-40+16=1$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\left[(α^2+β^2)\ln(x-5+e)+2(α+1)\ e^{5-x}\right]=α^2+β^2+2α+2$

Β. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=5$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=f(5)$, δηλ.

$α^2+β^2+2α+2=1 \Leftrightarrow α^2+β^2+2α+1=0 \Leftrightarrow (α+1)^2+β^2=0 \Leftrightarrow α=-1$ και $β=0$

Γ. Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16, & 0<x<5 \\ \ln(x-5+e), & x\geq 5 \end{cases}$ οπότε :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln(x-5+e)\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5+e)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αν f(t) είναι η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό τότε $f'(t)=\dfrac{8}{t+1}-2$ με $t\in[0,+\infty)$. Είναι

$f(t)=8\ln(t+1)-2t+c,\ c\in\mathbb{R}$

Ισχύει $f(0)=0 \Leftrightarrow 8\ln 1+c=0 \Leftrightarrow c=0$. Άρα : $f(t)=8\ln(t+1)-2t$ με $t\in[0,+\infty)$.

β) Είναι $f'(t)=\dfrac{8}{t+1}-2=\dfrac{8-2t-2}{t+1}=2\dfrac{3-t}{t+1}$, $t\geq 0$.

Τη χρονική στιγμή t = 3 η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό γίνεται μέγιστη.

t	0	3	+∞
f΄(t)	+	0	−
f(t)	↗		↘

γ) Είναι $f(8)=8\ln 9-16=8\ln 3^2-16=16\ln 3-16=16(\ln 3-1)>0$

(γιατί $3>e \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln 3>1$) άρα υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό.

Επίσης $f(10)=8\ln 11-20\cong -0{,}8<0$. Για $t\in[8{,}10]$ έχουμε $f(t)$ γνησίως φθίνουσα , άρα το σύνολο τιμών της f είναι [f(10), f(8)] . Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών δηλαδή η εξίσωση f(t) = 0 έχει ακριβώς μια ρίζα . Επομένως για τιμή το t πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του φαρμάκου στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.