Θέματα Μαθηματικών & Στ. Στατ/κής
Γενικής Παιδείας
Γ΄ Λυκείου 2000

Ζήτημα 1ο

Α. α) Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$cf(x), \quad f(x)g(x), \quad f(x)/g(x) \text{ με } g(x) \neq 0$$

όπου c πραγματική σταθερά.

(Μονάδες 4,5)

Β.α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α Συνάρτηση	**Στήλη Β Πρώτη παράγωγος**
α. $x^2 + 3$	**1.** $1 - ημx$
β. $x + συνx$	**2.** $3x^2 - 8x$
γ. $xημx$	**3.** $2x + 3$
δ. $x^3 - 4x^2$	**4.** $ημx - xσυνx$
	5. $2x$
	6. $3x^2 - 4x$
	7. $ημx + xσυνx$

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \ x \neq 0,$$

είναι:

$A: e^x$,

$B: \dfrac{e^x - xe^x}{x^2}$,

$\Gamma: \dfrac{e^x + xe^x}{x^2}$,

$\Delta: \dfrac{xe^x - e^x}{x^2}$,

$E: \dfrac{xe^x - e^x}{x}$

(Μονάδες 4,5)

Απάντηση:

Α.
α) Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, θα ισχύει ότι:

$$f''(x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{και} \quad g''(x = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Τότε:

$$F(x + h) - F(x) = f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x) =$$

$$= f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)$$

και

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

β)
$[cf(x)]' = cf'(x)$, $c \in R$.
$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f''(x)g(x - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{με } g(x) \neq 0$$

Β.
α)
$(x^2 + 3)' = (x^2)' + 3' = 2x + 0 = 2x$
$(x + συνx)' = 1 - ημx$.
$(xημx)' = (x)'ημx + x(ημx)' = ημx + x \bullet συνx$.
$(x^3 - 4x^2)' = 3x^2 - 8x$.

Επομένως θα έχουμε:
α $\leftrightarrow$ 5 β $\leftrightarrow$ 1 γ $\leftrightarrow$ 7 δ $\leftrightarrow$ 2.

β) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$$

Επομένως σωστό είναι το Δ.

Ζήτημα 2ο

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική f_i	Σχετική συχνότητα $f_i(\%)$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	v = 50	1	100	-		-	

(Μονάδες 16)

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

(Μονάδες 4)

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι: $s^2 = 0{,}49$.

Δίνεται ότι:

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2}{v}\right\}$$

(Μονάδες 5)

Απάντηση:

Α. Από τον πίνακα έχουμε ότι:

$$v_1 = 10, \quad N_2 = 35, \quad x_1 v_1 = 10, \quad x_1^2 = 1, \quad x_2^2 = 4, x_3^2 = 9 \quad \text{και} \quad x_1^2 v_1 = 10$$

Όμως:

$N_2 = v_1 + v_2 \Leftrightarrow 35 = 10 + v_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{v_2 = 25}$.

Επειδή είναι:

$v = 50 \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 50 \Leftrightarrow 10 + 25 + v_3 = 50 \Leftrightarrow \boldsymbol{v_3 = 15}$.

Επομένως:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0{,}2, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{25}{50} = 0{,}5 \quad \text{και} \quad f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{15}{50} = 0{,}3$$

Ακόμα:

$v_1 = N_1 = 10$ και $v = N_3 = 50$.

Επιπλέον:

$$x_2v_2 = 2 \bullet 25 = 50, \quad x_3v_3 = 3 \bullet 15 = 45 \quad \text{και}$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i v_i = 10 + 50 + 45 = 105.$$

Τέλος, έχουμε:

$$x_2^2 v_2 = 2^2 \cdot 25 = 100, \quad x_3^2 v_3 = 3^2 \cdot 15 = 135 \quad \text{και}$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 v_i = 10 + 100 + 135 = 245.$$

Επομένως ο πίνακας γίνεται:

Τιμές μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική f_i	Σχετική συχνότητα $f_i(\%)$	Αθροιστική συχνότητα N_i	x_iv_i	x_i^2	$x_i^2v_i$
1	10	**0,2**	**20**	**10**	10	1	10
2	**25**	**0,5**	**50**	35	**50**	4	**100**
3	**15**	**0,3**	**30**	**50**	**45**	9	**135**
ΣΥΝΟΛΟ	v = 50	1	100	-	**105**	-	**245**

Β. Έχουμε ότι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{3} x_i v_i}{v} = \frac{105}{50} = 2{,}1$$

και ότι η εικοστή και η εικοστή πρώτη παρατήρηση είναι 2.

Άρα:

$$\delta = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$\Gamma.\quad s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{1}{50}\left(245 - \frac{105^2}{50}\right) =$$

=1/50(245-(11.025/50)) = 1/50(245-220,5) = 24,5/50 = 0,49.

Ζήτημα 3ο

Από 120 μαθητές ενός λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.
Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

Α: «Να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς».
(Μονάδες 8)

Β: «Να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς».
(Μονάδες 8)

Γ: «Να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς».
(Μονάδες 9)

Απάντηση:

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι οι 120 μαθητές του λυκείου, οπότε $N(\Omega) = 120$.
Έστω τα ενδεχόμενα:

Α: «Ομαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας» και
Β: «Ομαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών».

Τότε: $A \cap B$: «Ο μαθητής συμμετέχει και στους δύο διαγωνισμούς».
Τότε: $P(A) = 24/120 = 0{,}2$ και $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 \Leftrightarrow P(A') = 0{,}8$ και
$P(B) = 20/120 = 1/6$ και $P(B') = 1 - P(B) = 1 - (1/6) \Leftrightarrow P(B') = 5/6$ και
$P(A \cap B) = 12/120 = 0{,}1$.

Το ενδεχόμενο να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς είναι $A \cup B$, οπότε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= (24/120) + (20/120) - (12/120) = 32/120 \Leftrightarrow P(A) = 4/15$.

Το ενδεχόμενο να συμμετέχει σ' έναν μόνο από τους δύο διαγωνισμούς είναι:
$(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ άρα:

$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B') + P(A' \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$

$= (24/120) + (20/120) - 2 \bullet (12/120) = 20/120 \Leftrightarrow P(B) = 1/6$.

Τέλος, το ενδεχόμενο να μην συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς είναι $(A \cup B)'$, άρα
$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - (4/15) = 11/15$.

Ζήτημα 4ο

Στα σχολεία ενός δήμου υπηρετούν 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	**Σχετική συχνότητα fi (%)**
0 - 5	10
5 - 10	15
10 - 15	12
15 - 20	15
20 - 25	18
25 - 30	18
30 - 35	12

Α. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

(Μονάδες 5)

Β. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:
α) Πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να διακαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του δήμου να παραμένει ο ίδιος.; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Απάντηση:

Α. Από τον πίνακα φαίνεται ότι τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας έχουν
15 + 18 + 18 + 12 = 63 άτομα.

Β. α) Το συγκεκριμένο ερώτημα, με τον τρόπο που διατυπώνεται, επιδέχεται περισσότερες από μία απαντήσεις.

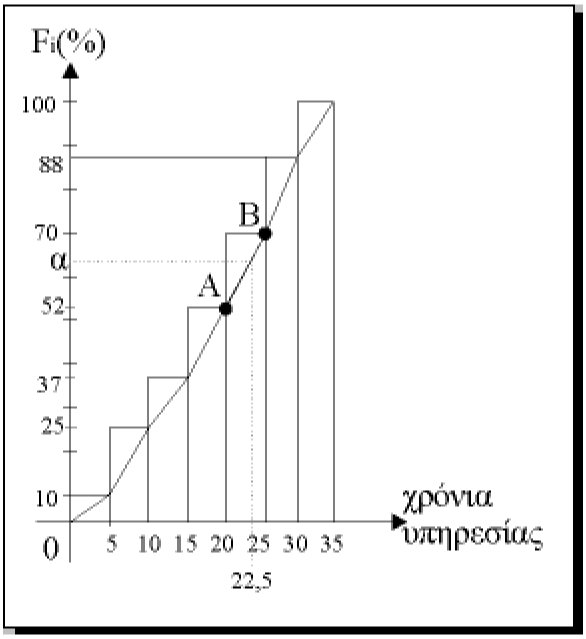
Α΄λύση:
Αν ακολουθήσουμε το σκεπτικό του σχολικού βιβλίου και υποθέσουμε (αν και δε μας δίνεται) ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη, τότε στα επόμενα 12,5 χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν όσοι έχουν πάνω από 22,5 χρόνια υπηρεσίας, Τα 22,5 χρόνια υπηρεσίας είναι το μέσο της κλάσης [20, 25), άρα θα έχουμε σχετική συχνότητα το μισό του 18, δηλαδή 9 (λόγω της ομοιόμορφης κατανομής), επομένως 9 + 18 + 12 = 39 εκπαοδευτικοί.

Β΄λύση:
Αφού η κατανομή δε μας δίνεται ότι είναι ομοιόμορφη, δεν μπορούμε να δώσουμε ακριβή αριθμό, αλλά <u>διάστημα</u> για τα έτη υπηρεσίας. Τα επόμενα 12,5 χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν όσοι έχουν πάνω από 22,5 χρόνια υπηρεσίας. Τα 22,5 χρόνια υπηρεσίας βρίσκονται μέσα στην κλάση [20, 25), άρα μπορούμε να πούμε ότι θα συνταξιοδοτηθούν το λιγότερο 18 + 12 = 30

εκπαιδευτικοί και το περισσότερο 18 + 12 + 18 = 48 εκπαιδευτικοί.

Γ΄λύση:
Με τη βοήθεια του πολυγώνου των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων θα έχουμε ότι η τεταγμένη (α) του σημείου (22,5, α) του πολυγώνου είναι το πλήθος των εκπαιδευτικών με υπηρεσία μέχρι 22,5 χρόνια, άρα 100 – α είναι το πλήθος των ζητούμενων εκπαιδευτικών.

Χρόνια υπηρεσίας [-)	**Σχετική συχνότητα fi (%)**	**Σχετική αθροιστική συχνότητα F_i(%)**
0 - 5	10	10
5 - 10	15	25
10 - 15	12	37
15 - 20	15	52
20 - 25	18	70
25 - 30	18	88
30 - 35	12	100



Έχουμε ότι Α (20, 52) και Β(25, 70).
Έστω y = αx + β η εξίσωση της ευθείας ΑΒ. Τότε:

$$\begin{cases} 52 = 20\alpha + \beta \\ 70 = 25\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 52 = 20\alpha + \beta \\ 18 = 5\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 52 = 20\alpha + \beta \\ \alpha = 3{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -20 \\ \alpha = 3{,}6 \end{cases}$$

Επομένως η εξίσωση της ΑΒ είναι: y = 3,6x – 20

Όπου για x = 22,5 έχουμε: α = 3,6 •22,5 – 20 ⇔ α = 61
Συνεπώς θα πάρουν σύνταξη: 100 – 61 = 39 εκπαιδευτικοί.

β) Μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν οι εκπαιδευτικοί που έχουν 30 –35 χρόνια προϋπηρεσίας, δηλαδή θα πρέπει να γίνουν 12 νέες προσλήψεις.