

2^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α) Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 ,

τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ Μονάδες } 9$$

Β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0

του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) σωστό ή (Λ) λάθος :

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε

η f' είναι συνεχής στο x_0 .

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$

κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$

και $f(a) \neq f(b)$ τότε, για κάθε αριθμό η υπάρχει ένας,

τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$.

ε) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [-\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, με σύνολο τιμών $f(A) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και που ικανοποιεί τη σχέση $\eta\mu(f(x)) = \frac{x}{x+1}$, $x \geq -\frac{1}{2}$.

Α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$, $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ Μονάδες 9

Β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 8

Γ) Να μελετήσετε την f ως προς τις ασύμπτωτες. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α) να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται Μονάδες 3

Β) να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ Μονάδες 4

Γ) να βρείτε τον τύπο της f^{-1} Μονάδες 2

Δ) να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ Μονάδες 7

Ε) να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα Μονάδες 5

Στ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον

άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{4}{3}, x = \frac{4}{3}$. Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f^4(x)+3f'(x)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 5

B) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x\geq 0$.

Μονάδες 5

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 3

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$, την εφαπτομένη ε και την ευθεία $x=7$.

Μονάδες 5

Ε) Να αποδείξετε ότι $2f(\sin^2\alpha)<f(1)+f(\sin 2\alpha)$ με $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 7